## ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА И ЊЕН ГРАФИК

*Проф. математике Тамара Максимовић-Тот*
*1. Разред Гимназије у Инђији*

Линеарна функција $f(x) = y$, записана у експлицитном облику је: $\boldsymbol{y = kx + n}$,
где су $k$ и $n$ реални бројеви.

$k$- коефицијент правца
$n$- слободан члан

График линеарне функције је **права линија**.

$y = kx + n$ , $n \in R$, $k \in R$

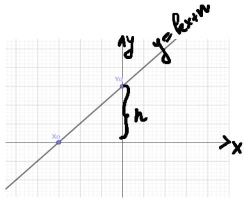
$n \neq 0$

$x = 0 \Rightarrow y = k \cdot 0 + n$
$y = n = y_0$

| $x$ | $0$ | $x_0$ |
|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $0$ |

$\downarrow (0, y_0)$ $\quad \downarrow (x_0, 0)$

$y = 0$
$kx + n = 0$
$kx = -n$
$\boxed{x = -\frac{n}{k}} = x_0$



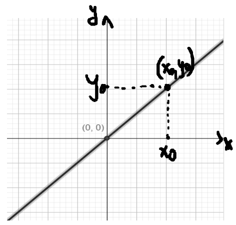

$n = 0$

$y = kx + n$
$y = k \cdot x$

| $x$ | $0$ | $x_0$ |
|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $y_0$ |

$\downarrow (0,0)$

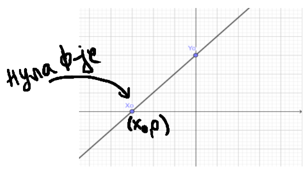
$y = k \cdot x_0 = y_0$




$n$- (слободан члан) је **одсечак на $O_y$ оси**

**ОСОБИНЕ ФУНКЦИЈЕ:**

1. НУЛА ФУНКЦИЈЕ
   То је вредност $x$-са када је ордината $y = 0$.
   Можемо такође рећи да је то тачка пресека графика линеарне функције са $O_x$ осом.
   Координате те тачке су $(x_0, 0)$, где је $x_0 = -\frac{n}{k}$ , вредност $x$-са када је ордината $y = 0$.




$\boxed{n = y_0}$

2. ЗНАК ФУНКЦИЈЕ
   То је вредност $x$-са за које је

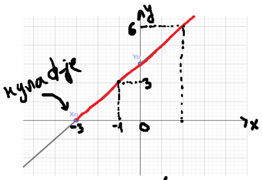
$y$

$y > 0$ $\qquad$ $y < 0$

Функција је позитивна када је:
(графички) график функције изнад $O_x$ осе
(рачунски) $\boldsymbol{kx + n} > 0$

Функција је негативна када је:
(графички) график функције испод $O_x$ осе
(рачунски) $\boldsymbol{kx + n} < 0$

y > 0




$y>0$ за $x\in(x_0,+\infty)$

$y=kx+n$

$\boxed{y>0}$

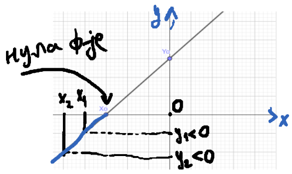
$kx+n>0$

$kx>-n$

$x>-\frac{n}{k}$

$\boxed{x>x_0}$

y<0




$y<0$ за $x\in(-\infty,x_0)$

$y=kx+n$

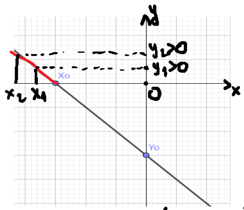
$\boxed{y<0}$

$kx+n<0$

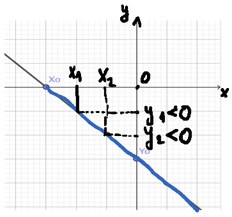
$kx<-n$

$x<-\frac{n}{k}$

$\boxed{x<x_0}$




$y>0$ за $x\in(-\infty,x_0)$




$y<0$ за $x\in(x_0,+\infty)$

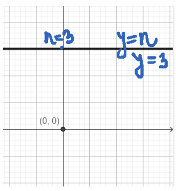
3. МОНОТОНОСТ ФУНКЦИЈЕ

То је вредност $x$-са за које је функција константна, опадајућа или растућа.

k- коефицијент правца

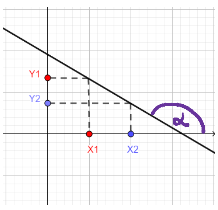
$y=kx+n$

$k = 0$
Фукција је константна




$\boxed{y = n}$

$k < 0$
Функција је опадајућа



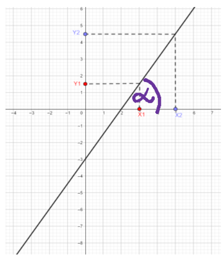

$x_1 < x_2$
$y_1 > y_2$

Угао α је туп.

$y=-3x+5$

y ↘

$k > 0$
Функција је растућа




$x_1 < x_2$
$y_1 < y_2$

Угао α је оштар.

$y=3x+5$

y ↗

Пример 1.

а) Дата је функција $f(x) = 3x + 2$ . Наћи $f(1), f(-1), f\left(\frac{2}{3}\right)$.

$y=3x+2$

$f(1)=3\cdot1+2=3+2=5$

$f(-1)=3\cdot(-1)+2=-3+2=-1$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}+2=4$

| x | 1 | -1 | $\frac{2}{3}$ |
|---|---|---|---|
| y | 5 | -1 | 4 |

б) Одредити коефицијент правца и слободан члан функције $f(x) = 3x + 2$.

$k=3$ , $n=2$

в) Одредити нулу функције $f(x) = 3x + 2$.

$y=3x+2$

$y=0$

$3x+2=0$

$3x=-2$

$\boxed{x=-\frac{2}{3}}$ $\left(-\frac{2}{3},0\right)$

г) Одредити знак функције $f(x) = 3x + 2$.

$y=3x+2$

$y<0$ за $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$

$y>0$

$3x+2>0$

$3x>-2$

$\boxed{x>-\frac{2}{3}}$

$y>0$ за $x\in\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$

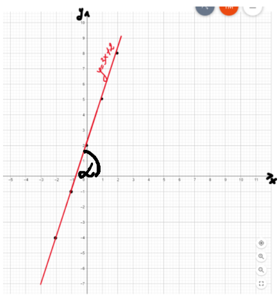
д) Скицирати график функције $f(x) = 3x + 2$.

$k=3$

$n=2$

$k=\frac{3}{1}$ ⊕↑ ↓⊖ →

$k=3=\frac{3}{1}=\frac{-3}{-1}$ ⊕↑ ↓⊖ ←




ђ) Одреди монотоност функције $f(x) = 3x + 2$.

$k=3>0$

$y\nearrow$ за $x\in(-\infty,+\infty)$

-Са графика се види да је функција растућа за $x \in (-\infty, +\infty)$.
-Такође је $k = 3 > 0$, што значи да је функција растућа.
-Угао који график функције образује са позитивним делом $O_x$ осе, је угао α и он је оштар, што такође значи да је функција растућа.

<u>Пример 2.</u>

Скицирати график функције $y = -\frac{2}{5}x - 1$

$n=-1$

$k=-\frac{2}{5}=\frac{-2}{5}$ ↓ →  $k=\frac{2}{-5}$ ↑ ←

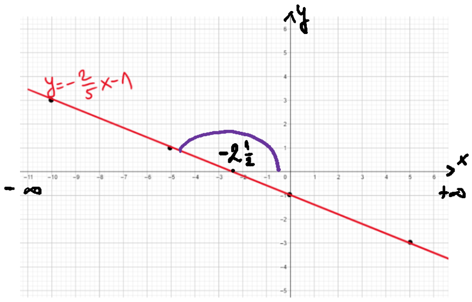
1. Нула функције

$y=0$

$-\frac{2}{5}x-1=0$

$-\frac{2}{5}x=1$

$x=-\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}$ $\left(-2\frac{1}{2},0\right)$



2. Знак функције

$y>0$ за $x\in\left(-\infty,-2\frac{1}{2}\right)$

$y<0$ за $x\in\left(-2\frac{1}{2},+\infty\right)$

3. Монотоност функције

$k=-\frac{2}{5}<0$ $\quad$ $y\downarrow$ за $x\in(-\infty,+\infty)$

-Са графика се види да је функција опадајућа за $x\in(-\infty,+\infty)$.
-Такође је $k=-2/5<0$, што значи да је функција опадајућа.
-Угао који график функције образује са позитивним делом $O_x$ осе, је угао $\alpha$ и он је туп, што такође значи да је функција опадајућа.

Пример 3.

Скицирати график функције $y=|2x+4|-2$

$$|2x+4|=\begin{cases}2x+4, & 2x+4\geq 0,\ 2x\geq -4,\ \boxed{x\geq -2}\\ -(2x+4), & \boxed{x<-2}\end{cases}$$

| | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert 2x+4\rvert$ | $-(2x+4)$ | | $2x+4$ |
| | услов: $x\in(-\infty,-2)$ | | $x\in(-2,+\infty)$ |

$y=|2x+4|-2$ $\qquad$ $y=|2x+4|-2$

$y=-(2x+4)-2$ $\qquad$ $y=2x+4-2$

$y=-2x-4-2$ $\qquad$ $\boxed{y=2x+2}$

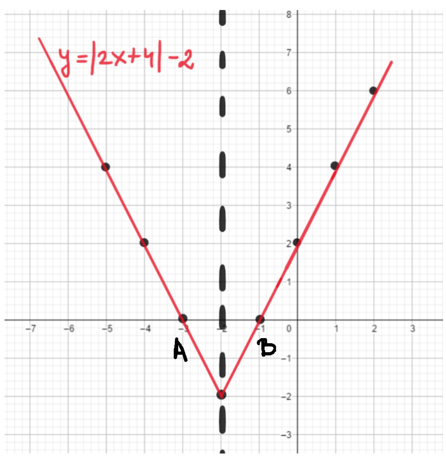
$\boxed{y=-2x-6}$ $\qquad$ $n=2$

$n=-6$ $\qquad$ $k=2=\frac{2}{1}=\frac{-2}{-1}$

$k=-2=\frac{-2}{1}=\frac{2}{-1}$

1. Нуле функције

$y=0 \Rightarrow x=-3$, $x=-1$ $\qquad$ $x\in\{-1,-3\}$ $\qquad$ $A(-3,0)$, $B(-1,0)$




2. Знак функције

$y>0$ за $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

$y<0$ за $x\in(-3,-1)$

3. Монотоност функције

$y\downarrow$ за $x\in(-\infty,-2)$

$y\uparrow$ за $x\in(-2,+\infty)$

Пример 4.

Скицирати график функције $y = |2x-1| + |x-3| - |x+2|$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & 2x-1 \geq 0,\ 2x \geq 1,\ \boxed{x \geq \frac{1}{2}} \\ -(2x-1), & \boxed{x < \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x-3 \geq 0,\ \boxed{x \geq 3} \\ -(x-3), & \boxed{x < 3} \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x+2 \geq 0,\ \boxed{x \geq -2} \\ -(x+2), & \boxed{x < -2} \end{cases}$$

| | $-\infty$ … $-2$ | $-2$ … $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ … $3$ | $3$ … |
|---|---|---|---|---|
| $\|2x-1\|$ | $-(2x-1)$ | $-(2x-1)$ | $2x-1$ | $2x-1$ |
| $\|x-3\|$ | $-(x-3)$ | $-(x-3)$ | $-(x-3)$ | $x-3$ |
| $\|x+2\|$ | $-(x+2)$ | $+(x+2)$ | $x+2$ | $x+2$ |
| | I услов: $x\in(-\infty,-2)$ | II $x\in[-2,\frac{1}{2})$ | III $x\in[\frac{1}{2},3)$ | IV $x\in[3,+\infty)$ |

I $\boxed{x\in(-\infty,-2)}$

$y = |2x-1| + |x-3| - |x+2|$

$y = -(2x-1) - (x-3) + (x+2)$

$y = -2x+1 - \cancel{x}+3 + \cancel{x}+2$

$\boxed{y = -2x+6}$

$n=6$

$k=-2=\frac{-2}{1}=\frac{2}{-1}$

II $\boxed{x\in[-2,\frac{1}{2})}$

$y = |2x-1| + |x-3| - |x+2|$

$y = -(2x-1) - (x-3) - (x+2)$

$y = -2x+1 - x+3 - x-2$

$\boxed{y = -4x+2}$

$n=2$

$k=-4=\frac{-4}{1}=\frac{4}{-1}$

III $x\in[\frac{1}{2},3)$

$y = |2x-1| + |x-3| - |x+2|$

$y = 2x-1 - (x-3) - (x+2)$

$y = \cancel{2x}-1 - \cancel{x}+3 - \cancel{x}-2$

$\boxed{y=0}$

IV $x\in[3,+\infty)$

$y = |2x-1| + |x-3| - |x+2|$

$y = (2x-1) + (x-3) - (x+2)$

$y = 2x-1 + \cancel{x}-3 - \cancel{x}-2$

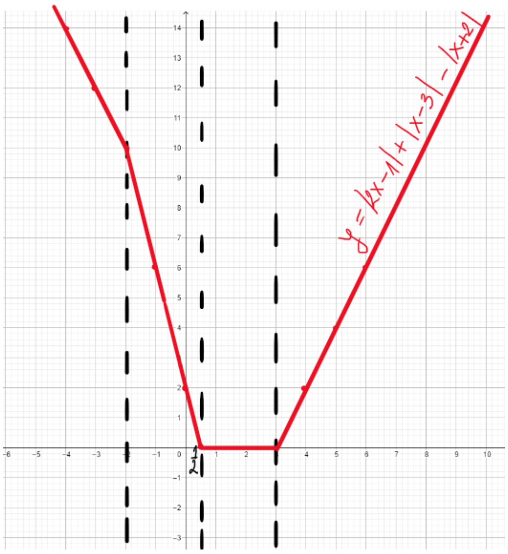
$\boxed{y = 2x-6}$

$n=-6$

$k=2=\frac{2}{1}=\frac{-2}{-1}$

1. Нула функције

$x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right], \quad y=0$




2. Знак функције

$y>0$ за $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

$y<0$ за $x \in \emptyset$ или $x \in \{\}$

3. Монотоност функције

$y \searrow$ за $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

$y$ константна за $x \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$

$y \nearrow$ за $x \in (3, +\infty)$

ЗАДАЦИ ЗА ДОМАЋИ РАД:

1. а) Скицирај график следећих функција
   б) Одреди нуле функција
   в) Одреди знак функција
   г) Одреди монотоност функција

(ЛАКШИ задаци)

I) $y = 3x - 4$

II) $y = |x| - 3$

(ТЕЖИ задаци)

I) $y = -\frac{1}{3}x + 1$

II) $y = |x - 1|$

III) $y = |x + 1| + |1 - x|$

Пример 5.

За функцију $f(x) = (a-3)x + 2a + 5$ одреди параметар $a$ тако да график функције:

а) садржи тачку $B(3, -1)$.
б) сече $O_y$ осу у тачки чија је ордината $y = 5$.
в) сече $O_x$ осу у тачки чија је апсциса $x = 1$.

Ако нека тачка са координатама $(x_0, y_0)$ припада графику линеарне функције $y = kx + n$ или другим речима ако график линеарне функције "пролази" кроз ту тачку, онда то значи да ћемо координате те тачке $(x_0, y_0)$ убацити у линеарну једначину $y = kx + n$ на следећи начин: $x = x_0$, $y = y_0$ онда добијамо следећу једначину: $y_0 = kx_0 + n$.

а) $B(\overset{x}{3}, \overset{y}{-1}) \in y = (a-3)\cdot x + 2a + 5$

$-1 = (a-3)\cdot 3 + 2a + 5$

$3a - 9 + 2a + 5 = -1$

$5a - 4 = -1$

$5a = 3$

$\boxed{a = \frac{3}{5}}$

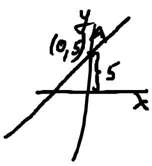
б) $y = (a-3)x + 2a + 5$ $\quad y = 5, \; x = 0$

$5 = (a-3)\cdot 0 + 2a + 5$

$5 = 0 + 2a + 5$

$2a = 0$

$\boxed{a = 0}$




в) $y = (a-3)x + 2a + 5$ $\quad y = 0, \; x = +1$

$0 = (a-3)\cdot 1 + 2a + 5$

$a - 3 + 2a + 5 = 0$

$3a = -2$

$\boxed{a = -\frac{2}{3}}$

$y=\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{1}\right)\cdot x+2\cdot\frac{3}{5}+5$

$y=\frac{3-15}{5}x+\frac{6}{5}+\frac{25}{5}$

$\boxed{y=\frac{-12}{5}x+\frac{31}{5}}$

$y=(0-3)x+2\cdot 0+5$

$\boxed{y=-3x+5}$

$y=\left(-\frac{2}{3}-\frac{3}{1}\right)x+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+5$

$y=\frac{-2-9}{3}x-\frac{4}{3}+\frac{15}{3}$

$\boxed{y=\frac{-11}{3}x+\frac{11}{3}}$

<u>Пример 6.</u>

За функције $y = (2a - 5)x + 7$ и $y = (10 - a)x - 3$
одреди параметар $a$ тако да графици ових функција буду паралелни.

Графици функција $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$ ће бити:
паралелни ако и само ако важи $k_1 = k_2$
међусобно нормални ако и само ако $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$k_1=\frac{-1}{k_2}$ или $k_2=\frac{-1}{k_1}$

$p_1: y=(2a-5)x+7$

$k_1=2a-5$

$n_1=7$

$p_2: y=(10-a)\cdot x-3$

$k_2=10-a$

$n_2=-3$

$p_1 \parallel p_2 \iff k_1=k_2$

$2a-5=10-a$

$2a+a=10+5$

$3a=15$

$\boxed{a=5}$

$p_1: y=(2\cdot 5-5)x+7$

$\boxed{y=\boxed{5}x+7}$

$p_2: y=(10-5)x-3$

$y=\boxed{5}x-3$

ЗАДАЦИ ЗА ДОМАЋИ РАД:

2. За функцију $y = (m - 4)x - 3m + 10$ одредити параметар $m$, тако да:

а) тачка $A(1,2)$ припада графику функције.
б) график функције сече $O_y$ осу у тачки чија је ордината $y = 1$.
в) $x = 2$ буде нула функције.